Colle du 27/05 - Sujet 1
Représentation matricielle et variables aléatoires

Question de cours. Démontrer la formule de la matrice de la composition.

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $M = \begin{pmatrix} \binom{0}{0} & \binom{1}{0} & \cdots & \binom{n}{0} \\ 0 & \binom{1}{1} & \cdots & \binom{n}{1} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \binom{n}{n} \end{pmatrix}$. On note $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_n[X])$ canoniquement associé à M.

1. Déterminer u.
2. Montrer que M est inversible et calculer M^{-1}.
3. Préciser M^p pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2. On possède deux urnes A et B contenant au total $N \geqslant 2$ boules. On note X_n le nombre de boules contenues dans l'urne A. A chaque étape on choisit une boule parmi les N et on la change d'urne.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, exprimer $\mathbb{E}(X_{k+1} - X_k)$ en fonction de $\mathbb{E}(X_k)$.
2. En déduire pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\mathbb{E}(X_{k+1}) = \left(1 - \frac{2}{N}\right)\mathbb{E}(X_k) + 1$.
3. Déterminer $\lim\limits_{k \to +\infty} \mathbb{E}(X_k)$.

Colle du 27/05 - Sujet 2
Représentation matricielle et variables aléatoires

Question de cours. Démontrer la formule de la matrice du vecteur image.

Exercice 1. On lance un dé à six faces et on procède de la façon suivante : si le résultat est entre 1 et 5, on avance le pion du nombre de cases indiqué et si le résultat est 6, on recule le pion de 3 cases.

1. Calculer le numéro moyen de la case à laquelle se trouve le pion à l'étape n.
2. On pose X_n le nombre de fois que le pion à avancé durant les n premières étapes. Quelle est la loi de X_n ?
3. Soit S_n le numéro de la case à laquelle se trouve le pion à l'étape n. Exprimer S_n en fonction de X_n et d'une variable uniforme sur $[\![1;5]\!]$.
4. Retrouver alors le résultat de la question 1.

Exercice 2. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ \alpha & 0 & \alpha & 0 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ canoniquement associé.

1. Déterminer le rang de A.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$.

Colle du 27/05 - Sujet 3
Représentation matricielle et variables aléatoires

Question de cours. La formule sur la fonction génératrice de la somme.

Exercice 1. Lors d'une compétition, on a n tireurs qui tirent chacun deux fois dans une cible. On suppose tous les tirs indépendants et les tireurs tous exactement du même niveau. On note X le nombre de tireurs qui atteignent la cible au premier tire et Z le nombre de tireurs qui atteignent au moins une fois la cible lors des deux tirs.

1. Quelle est la loi de X ?
2. Quelle est la loi de Z ?
3. Quelle est la loi de $Y = Z - X$? A quoi correspond cette variable aléatoire ?
4. Calculer $\mathbb{V}(X + Y)$. Que peut-on en déduire ?

Exercice 2. Soient E un espace vectoriel de dimension 3 et $\mathscr{C} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que

$$\operatorname{mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

On pose enfin $\varepsilon_1 = e_1 + e_3$, $\varepsilon_2 = e_1 + e_2$, $\varepsilon_3 = e_1 + e_2 + e_3$.

1. Montrer que $\mathscr{B} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ est une base de E et déterminer $\operatorname{mat}_{\mathscr{B}}(f)$.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.